

**Reticulados.** Cintya Wink de Oliveira Benedito, Antonio Aparecido de Andrade. – Ciências Exatas – Matemática – Departamento de Matemática – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas – Campus São José do Rio Preto.

Neste trabalho apresentamos ferramentas e conceitos básicos da teoria de reticulados em  $\mathbb{R}^n$ , tendo a densidade como conceito central. Um subconjunto  $\Lambda$  de  $\mathbb{R}^n$  é um reticulado se existe uma base  $\beta = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$  tal que

$$x \in \Lambda \text{ se, e somente se, } x = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n, \text{ com } a_i \in \mathbb{Z} \text{ para todo } i.$$

A base de um reticulado não é única. Temos que dado um reticulado  $\Lambda$  gerado por uma base  $\beta$ , uma base  $\beta'$  de  $\mathbb{R}^n$  também é base deste reticulado se, e somente se,  $\beta'$  está contida em  $\Lambda$  e a matriz mudança de base  $M$  tem entradas inteiras e determinante  $\pm 1$ .

Também, definimos seus principais parâmetros, tais como região fundamental, volume, empacotamento esférico, densidade de empacotamento, densidade de centro e a matriz de Gram. O conjunto

$$P_\beta = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \sum \lambda_i v_i, 0 \leq \lambda_i \leq 1, i=1, \dots, n\}$$

é chamado de região fundamental de  $\Lambda$  com relação a base  $\beta$ . Além da região fundamental  $P_\beta$ , também existem outras regiões que podem ser obtidas por translações de  $P_\beta$ , tais como  $P_{\beta+l}$ , com  $l \in \Lambda$  associadas a uma base  $\beta$  do reticulado  $\Lambda$ . Uma propriedade importante dos reticulados é que podemos ladrilhar  $\mathbb{R}^n$  com estas regiões. Isto significa que cada ponto de  $\mathbb{R}^n$  está em uma das translações de  $P_\beta$  e que duas destas regiões só se tocam nos bordos ou não tem interseção.

Definimos o volume da região  $P_\beta$  como o módulo do determinante de uma matriz  $A$ , em que as linhas de  $A$  são formadas pelos vetores de uma base  $\beta$  do reticulado  $\Lambda$ . O volume de um reticulado  $\Lambda$  é definido como o volume da sua região fundamental.

Um empacotamento esférico é uma distribuição de esferas de mesmo raio do  $\mathbb{R}^n$  de forma que a interseção de quaisquer duas esferas tenha no máximo um ponto e que este arranjo de esferas ocupe o “maior espaço possível” do  $\mathbb{R}^n$ . Um empacotamento reticulado é um empacotamento em que o conjunto dos centros das esferas forma um reticulado  $\Lambda$  de  $\mathbb{R}^n$ . O interessante são os empacotamentos associados a um reticulado  $\Lambda$  em que as esferas tenham raio máximo. Observamos que  $\rho = \Lambda_{\min} / 2$  é o maior raio para o qual é possível distribuir esferas centradas nos pontos de  $\Lambda$  para obtermos um empacotamento, pois se tomarmos esferas com raio maior haverá sobreposição das esferas.

A densidade de empacotamento de um reticulado é a proporção do espaço  $\mathbb{R}^n$  coberto pela união das esferas, ou seja,

$$\Delta(\Lambda) = \frac{\text{volume da região coberta pelas esferas}}{\text{volume da região fundamental}}$$

e a densidade de centro é definida pela expressão

$$\delta(\Lambda) = \rho^n / \text{vol}(\Lambda),$$

onde  $\rho$  é o raio da esfera. Deste modo, o principal objetivo do presente trabalho é encontrar um empacotamento reticulado com maior densidade de centro.

Se  $A$  é uma matriz geradora de um reticulado  $\Lambda$ , a matriz de Gram associada a matriz  $A$  é definida por

$$G = A^T A.$$

Temos que a matriz de Gram é uma matriz simétrica e que as suas entradas são produtos escalares. Assim,  $G$  guarda informações importantes sobre a base escolhida.

Vimos que um reticulado tem várias bases diferentes, mas a matriz de Gram pode mudar dependendo da base. Assim, temos que um reticulado possui várias matrizes de Gram diferentes. No entanto, o determinante de cada uma delas é o mesmo e só depende do reticulado. Por isso, podemos definir o determinante de  $\Lambda$ ,  $\det(\Lambda)$ , como o determinante de uma matriz de Gram (qualquer) de  $\Lambda$ . Este número tem uma interpretação geométrica surpreendente, é o quadrado do volume de uma região fundamental.

**Referências Bibliográficas:**

- Stewart, I., Tall, D.,** Algebraic Number Theory, Chapman Hall, New York, 1987.
- Samuel, P.,** Algebraic theory of numbers, Hermann, Paris, 1967.
- Ribeiro, A. C.,** Reticulados sobre corpos de números, Dissertação de Mestrado, IBILCE, UNESP, São José do Rio Preto, 2003.
- Marcus, D. A.,** Numbers Fields, Springer-Verlag, 1977.
- Oliveira, C. M. de,** Discriminante, Ramificação e Diferente. } " Dissertação de Mestrado, IBILCE, UNESP, São José do Rio Preto, 2005.
- Endler, O.,** Teoria dos Números Algébricos, IMPA, Rio de Janeiro, 1986.
- Herstein, I. N.,** Tópicos de Álgebra, Editora Polígono S. A. 1970.
- Alves, C.,** Reticulados via Corpos Ciclotômicos, Dissertação de Mestrado, IBILCE, UNESP, São José do Rio Preto, 2005.

**Bolsa:** CNPq/PIBIC